***Лекция 4***

**Общие уравнения движения твердого тела.**

**Динамическая эквивалентность систем сил.**

Основной задачей динамики твердого тела является определение его движение под действием заданных сил и реакций связей. Если тело свободно (Рис.1), то следует найти функции **шести** координат (xAyAzA и углы Эйлера .







Рис.1 Рис.2 Рис.3 Если тело несвободно, то, кроме закона движения, следует найти реакции связей. Предположим, что трение отсутствует, и рассмотрим частные случаи движения.

В плоском движении (Рис.2) **три** координаты (xAyA) определят положение тела и возникают **три** реакции плоскости, по которой движется тело: нормальная реакция N и моменты относительно осей x и у. Всего оказывается **шесть** неизвестных.

 Вращающееся тело (Рис.3) имеет одну координату (угол поворота ) и пять неизвестных реакций XAYAZAXBYB. Здесь опять **шесть** неизвестных.

 Таким образом, при любом движении твердого тела необходимо иметь **шесть** скалярных уравнений для определения закона движения и реакций связей. Назовем их ***общими уравнениями движения тела***.

 Общие уравнения движения тела являются следствием двух теорем: о движении центра масс и об изменении относительного кинетического момента.

M**wC**=**Ve** (1)

d**KС** /dt=**MeС** (2)

 Матрично

M*wC*=*V*e (3)

d*KС*/dt=*MeС* KС(t)=*J*С(t)(t) (4)

 Однако использовать теорему (4) в такой записи трудно т.к. матрица инерции является здесь неизвестной функцией времени *J****С*** (t), и ее невозможно продифференцировать.

Поэтому необходимо перейти к системе отсчета, связанной с телом. В ней матрица инерции уже не будет зависеть от времени.

*K*’С(t)= =*J’*С’(t) *J’*С=Const

Теперь вектор

**КС** = Kx’ **i’** + Ky’**j’**+ Kz’**k’**

задан в подвижной системе отсчета, и производную от него следует брать по теореме о связи производных (вспоминаем сложное движение точки).

d**KС** /dt= dr**KС** /dt+ ******x **KС**

Матрично

d*KС*/dt=d(*J’*С’)/dt+ **’(*J’*С’)= *J’*С d’/dt+**’*J’*С’= *J’*С**’*J’*С’

Опуская штрихи, приходим к искомым ***общим уравнениям движения*** тела в системе отсчета, связанной с телом

 *MwC=Va+VR* (5)

* JС +JС=MaС+ MRС*

Здесь внешние силы разделены на активные и реакции связей (индекс R)

В случаях сферического и вращательного движений во второй формуле С можно заменить на неподвижную точку О.

 В развернутом виде общие уравнения представляют собой систему шести скалярных уравнений. Эти уравнения определяют как движение тела по начальным условиям, так и реакции связей.

 Назовем ***эквивалентными*** системы сил, вызывающие одинаковое движение тела при данных начальных условиях и одинаковые реакции связей. В Статике движения не было, и мы называли ***статически эквивалентными*** системы сил, вызывающие одинаковые реакции. Было показано, что условием статической эквивалентности двух систем сил является равенство их главных векторов и главных моментов.

 Уравнения (5) позволяют единственным образом определить закон движения и реакции связей по заданным активным силам. Их решение однозначно определяется их правой частью, т.е. главным вектором и главным моментом нагрузки. Значит ***условием динамической эквивалентности*** двух нагрузок, приложенных к твердому телу, опять является равенство их главных векторов и главных моментов, ибо при выполнении этих условий уравнения движения не изменяются при замене одной системы сил другой.

**Уравнения поступательного движения тела**

Поскольку в пространственном поступательном движении тело не вращается, то

** =0 (** = 0) *=*0 $W\_{c}=\left(\begin{matrix}\ddot{x}\_{c}\\\ddot{y}\_{c}\\\ddot{z}\_{c}\end{matrix}\right)$

и главный вектор реакций связей равен нулю, то уравнения (5) приобретают вид

M$\ddot{x}$C=Fkx 0= mx (Fk)+MxR

M$\ddot{y}$C=Fky 0= my (Fk)+MyR

M$\ddot{z}$C=Fkz 0= mz (Fk)+MzR

Три дифференциальных уравнения определяют закон движения тела x(t), y(t), z(t), а остальные уравнения служат для нахождения главных моментов реакций связей относительно трех осей.

**Уравнения вращательного движения тела.**

Пусть тело вращается вокруг оси z. Тогда



x=y=0, z=$\dot{φ}$,

z= $\dot{ω}$z= $\ddot{φ}$ ,

*WC=(E+)r*

Здесь *E*  и ** - присоединенные матрицы углового ускорения и скорости.

Теперь из (13) вытекают полные уравнения движения тела

M*=*

 Рис.1

+=

В развернутом виде

 MxC2 MyCz=Fkx+XA+XB

 MxCz MyC2 = Fky+YA+YB

 0 =Fkz+ZA

J yzz2 Jxzz =mx(Fk)YBh

 -Jxz2Jyzz =my(Fk)+XBh

 Jzz =mz(Fk)

 В этих шести уравнениях шесть неизвестных: закон вращения  (t) и пять составляющих реакций подшипников. Собственно ***дифференциальным уравнением вращения*** является последнее уравнение

Jz$\ddot{φ} $= mz(Fk)

Оно определяет закон вращения  (t). Остальные уравнения служат для определения реакций подшипников по найденному закону вращения.

 Следует помнить, что силы, приложенные к телу, могут зависеть от угла поворота и угловой скорости тела. С помощью уравнения (18) можно решать прямые и обратные задачи динамики вращения тела. Из него вытекает также ***силовое условие равнопеременного вращения***. Очевидно, что для сохранения углового ускорения постоянным необходимо, чтобы главный момент приложенных сил был постоянным.

Mz=Const

 Чтобы тело вращалось равномерно, этот момент должен быть равен нулю

Mz=0

**Уравновешенность вращающегося тела**

 После того как закон движения найден из дифференциального уравнения вращения, из остальных уравнений можно найти реакции опор XAYAXBYB и ZA. Из уравнений (18) видно, что а ZA не зависит от вращения тела, а остальные реакции могут зависеть.

 Опыт показывает, что при больших угловых скоростях вращения эти реакции могут достигать значений, опасных разрушением подшипников. Поэтому актуальным является знание условий, позволяющих избежать такой опасности.

 Тело называется ***динамически уравновешенным*** относительно оси вращения, если реакции подшипников не зависят от скорости вращения тела. Чтобы найти условия уравновешенности, исследуем уравнения для реакций, которые могут зависеть от вращения

 -MyCz=Fkx+XA+XB

 MyC2=Fky+YA+YB

J yzz2 Jxzz=mx(Fk)YBh

 Jxz2Jyzz=my(Fk)+XB h

Очевидно, что если бы левые части этих уравнений можно было обратить в ноль,

 MyCz=0

 MyC2=0

J yzz2 Jxzz=0

Jyzz +Jxz2 =0

то реакции не зависели бы от вращения, а определялись бы только активными силами.

 Первые два условия (23) будут выполнены, если центр тяжести лежит на оси вращения. В этом случае ось называется ***центральной***

yC=0

Это условие обеспечивает уравновешенность, которая называется ***статической***, поскольку легко проверяется “статическим” опытом. Достаточно расположить ось вращения тела горизонтально. Если тело будет сохранять покой при любом угле поворота, то ось центральна. Например, взяв велосипедное колесо за ось, легко определить, что его ось не является центральной, т.к. ниппель заставит колесо повернуться в свое нижнее положение.

 Вторые два условия (23) дают однородную систему линейных уравнений относительно моментов инерции. Ее определитель отличен от нуля

= 4+2 > 0

Это значит, что система имеет только нулевое решение

Jzx=Jyz=0

 Таким образом, чтобы тело было ***динамически уравновешенным*** необходимо и достаточно чтобы ось вращения была ***центральной и главной*** осью инерции.

yC=0

Jzx=Jyz=0

Условия уравновешенности вращающегося тела показывают, насколько важной является задача определения главных осей инерции в теле. Этой задаче посвящена следующая глава.

**Уравнения плоского движения тела**

 Чтобы воспользоваться общими уравнениями динамики тела, придется рассмотреть движение плоской фигуры, полученной сечением тела через центр масс С параллельно плоскости движения тела.

 Совместим плоскость осей ху с плоской фигурой тела, а их начало с центром масс С. Тогда **WC** и главный момент реакций гладкой плоскости будут лежать в плоскости ху, а ****, **** и главный вектор реакций плоскости будут все время направлены вдоль оси z. Уравнения движения

 $M\left(\begin{matrix}\ddot{x}\_{c}\\\ddot{y}\_{c}\\\ddot{z}\_{c}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\sum\_{}^{}F\_{kx}\\\sum\_{}^{}F\_{ky}\\\sum\_{}^{}F\_{kz}+R\_{z}\end{matrix}\right)$

+=

в проекциях на оси приобретут вид

M$\ddot{x}$c=Fkx  J yzz2 Jxzz=mx(Fk) + MxR

M$\ddot{y}$c=Fky Jxz2Jyzz=my(Fk) + MyR

 0=Fkz+RzJz$\ddot{φ}$\*\*=mz(Fk)

Первое, второе и последнее уравнения

M$\ddot{x}$c=Fkx

M$\ddot{y}$c=Fky

Jz$\ddot{φ}$=mz(Fk)

являются ***дифференциальными уравнениями плоского движения***. Они определяют закон плоского движения x(t), y(t), (t). Из остальных трех уравнений, после определения ускорений, можно найти проекцию главного вектора реакций ZAR и главные моменты реакций MxR и MxR. Заметим, что реакции направляющих не будут зависеть от движения, если ось zC является главной в центре С.

**Сопротивление движению колеса**

**Момент сопротивления качению мягкого колеса по твердой дороге (традиционная модель)**

Традиционная модель описывает сопротивление вращению деформируемого колеса на твердой дороге. Такое сопротивление возникает только при внешнем вращательном воздействии (моменте или силе трения), стремящемся повернуть колесо, и не зависит от движения его центра. Поскольку при недостаточном трении ведомое колесо может не повернуться, рассмотрим сначала ***ведущее*** ***колесо*** (Рис.2).

Fig.2

(Традиционная модель, правильный рисунок)

m**g**

**M**

**Fтр**

С

**N**

k

При отсутствии вращательного момента М деформация колеса симметрична и реакция **N** центральна. Момент М вызывает смещение реакции **N** на х в сторону желаемого движения, создавая уравновешивающий момент –Nх= М. Смещение растет с моментом М вплоть до начала вращения колеса, когда смещение достигает предельного значения k. Пара {N,mg} (момент трения качения) работает только на повороте колеса, независимо от того, движется центр колеса или нет (от величины трения сцепления).

При отсутствии трения ***ведущее колесо*** вращается на месте, а ***свободное колесо*** скользит юзом бесконечно долго без обратного вращения.

При наличии трения сцепления ***ведомое колесо*** начнет двигаться, когда центральная движущая сила станет больше предельного значения силы трения F>Fтр=mgf, а вращаться только при fr > k. При малом коэффициенте трения fr<k колесо будет скользить без вращения, что фактически и происходит на льду со спущенным задним колесом переднеприводного автомобиля.

**Сила сопротивления движению твердого колеса по мягкой дороге.**

Сопротивление деформации дороги связано с поступательным движением зоны деформации дороги, поэтому оно возникает только при движении центра колеса. Поскольку при слабом сцеплении колеса с дорогой оно может буксовать на месте, рассмотрим сначала ***ведомое колесо*** (Рис.4).

**F**

С

**F**сопр

**R**

**N**

**k1**

**r**

α

m**g**

**Fтр**

Рис.4

Свободное покоящееся колесо симметрично деформирует дорогу. На площадке контакта действуют нормальные распределенные реакции. Равнодействующая нормальных реакций **R** вертикальна и проходит через центр колеса.

Движущая сила **F** делаетдеформацию дороги не симметричной. Точка приложения равнодействующей **R** смещается вперед и сама она, оставаясь центральной, наклоняется против движения колеса .

C ростом движущей силы **F** угол наклона будет расти и достигнет предельного значения α при начале движения центра колеса (с вращением или без). При этом точка приложения реакции **R** сместится на k1 ≈ r α

в сторону движения колеса. Назовем k1 ***коэффициентом сопротивления дороги***.

Опыты должны показать, как зависит k1 от радиуса колеса. Можно предположить, что зависимость слабая.

Переместим реакцию **R** в центр колеса (Рис.5). Ее составляющая **N** уравновесит нагрузкуm**g.** Составляющую **Fсопр** назовем ***силой сопротивления дороги***.

Найдем модуль силы сопротивления. Угол α мал, поэтому следует положить:

Cos α ≈1, Sin α≈ k1/r и N≈R=mg Fтр≈Rтр

Таким образом

Fсопр = R Sin α = NSin α ~ mg k1/r

**Fтр**

Рис.5

m**g**

**F**сопр

**N**

С

Р

**F**

Сила сопротивления уменьшается с увеличением радиуса колеса, что что объясняет лучшую проходимость автомобилей с большими колесами.

При недостаточном сцеплении ***ведущего колеса*** с дорогой

fr<k1

предельное значение коэффициента сопротивления дороги k1 может быть не достигнуто, независимо от величины вращательного момента. Сила трения **F**тр вызовет силу сопротивления **F**сопр=- **F**тр, и соответствующий ей угол наклона реакции **R,**  меньший, чем α**.** Начнетсябуксование колеса на месте.

 Поскольку сила сопротивления дороги **F**сопр никак не связана с вращением, то такая же сила, возникает и при движении саней в глубоком снегу.

m**g**

**N1**

**R**

**Fcопр**

k1

**F**

**N2**

**Fтр**

Опыты показывают, что для пары материалов разной твердости, например дерево-сталь, коэффициент сопротивления качению твердого колеса по мягкой дороге значительно превосходит коэффициент сопротивления мягкого колеса по твердой дороге:

Стальное колесо по дереву: k1=0,15-0,25 см

Деревянное колесо по стали: k=0,03-0,04 см

При движении податливого колеса по податливой дороге возникает как момент сопротивления вращению, так и сила сопротивления дороги. К сожалению, оба эти сопротивления в справочниках сводятся к моменту, так для пары дерево / дерево дается коэффициент k = 0,05-0,08